הצעת פתרון- בחינת הבגרות במתמטיקה שאלון 805

הצעת הפתרון נכתבה על-ידי

אודי נעים, צביקה מלכיאלי, רימה דריזין, אמנון הרפז, אוהד ריטרבנד, דור מנדל

סדרות

1. נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הכללי שלה הוא $a_n = 3n - 12$,
ונתונה סדרה המוגדרת על ידי הכלל $b_n = 2a_n + 1$.

א. (1) הראה כי $b_n = 6n - 23$.

(2) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה חשבונית.

ב. נתון כי האיבר האחרון בסדרה b_n הוא 79 .
מצא את מספר האיברים בסדרה b_n .

ג. נתון כי בסדרה a_n ובסדרה b_n יש אותו מספר איברים.
מצא את סכום האיברים במקומות האי־זוגיים בסדרה a_n .

שאלה 1

$a_n = 3n - 12$

$b_n = 2a_n + 1$

א (1)

$b_n = 2a_n + 1 = 2(3n-12) + 1 = 6n - 24 + 1 = \underline{6n - 23}$

א (2) נראה ש: קבוע $= b_{n+1} - b_n$

$b_{n+1} - b_n = 6(n+1) - 23 - [6n - 23] = \cancel{6n} + 6 - \cancel{23} - \cancel{6n} + \cancel{23}$

$\boxed{d = 6}$

ההפרש קבוע, כלומר b_n סדרה חשבונית

ב. $b_n = 79$

$79 = 6n - 23$

$6n = 102$

$\boxed{n = 17}$

בסדרה b_n יש 17 איברים

ג. בסדרה a_n יש 17 איברים אם כן מגיעים ל 9 אי זוגיים

$n = 9$

$a_1 = 3 \cdot 1 - 12 = -9$

$d = ?$

נחשב את ההפרש של a_n: $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 12 - [3n - 12]$

$= \cancel{3n} + 3 - \cancel{12} - \cancel{3n} + \cancel{12} = 3$

ההפרש אי זוגיים $= 2 \cdot 3 = 6$

$S_{\text{אי זוגיים}} = \frac{9[2 \cdot (-9) + (9-1) \cdot 6]}{2} = \boxed{135}$

טריגונומטריה במרחב

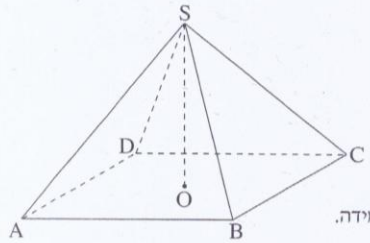
2. נתונה פירמידה ישרה ABCDS שבסיסה מלבן.

SO הוא גובה הפירמידה (ראה ציור).

נתון: $AS = 13$ ס"מ ,

הזווית בין מקצוע צדדי של הפירמידה

ובין בסיס הפירמידה היא 45° .



א. מצא את האורך של אלכסון הבסיס של הפירמידה.

ב. נתון גם: $\sphericalangle CAB = 50^o$.

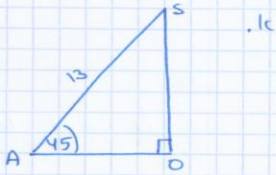
מצא את שטח הבסיס של הפירמידה.

ג. מצא את השטח של הפאה SBC .

/המשך בעמוד 3/

שאלה 2

א.



$\cos 45 = \frac{AO}{13}$

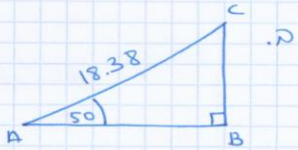
$AO = 13 \cdot \cos 45$

$\boxed{AO = 9.19}$

$\Downarrow$

$\boxed{AC = 2 \cdot AO = 18.38 \text{ מ"מ}}$

ב.



$\cos 50 = \frac{AB}{18.38}$

$AB = 18.38 \cdot \cos 50$

$AB = 11.814$

$S_{\triangle ABC} = \frac{11.814 \cdot 18.38 \cdot \sin 50}{2}$

$S_{\triangle ABC} = 83.169$ מ"מ

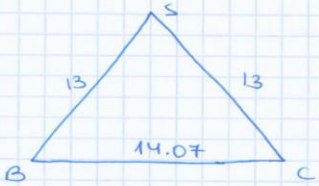
$\boxed{S_{ABCD} = 2 \cdot 83.169 = 166.3 \text{ מ"מ}}$

ג) נחשב את BC ב- $\triangle ABC$

$\sin 50 = \frac{BC}{18.38}$

$BC = \sin 50 \cdot 18.38 = 14.07$

נתבונן ב $\triangle SBC$



$(14.07)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cos \measuredangle S$

$338 \cos \measuredangle S = 140.03$

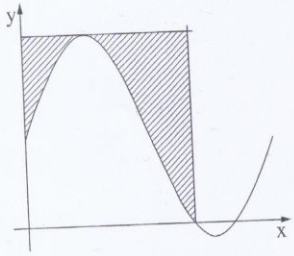
$\boxed{\measuredangle S = 65.52}$

$S_{\triangle SBC} = \frac{13 \cdot 13 \cdot \sin(65.52)}{2} =$

$\boxed{= 76.9 \text{ מ"מ}}$

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{3}+2\sin(2x)$

בתחום $0\le x\le \pi$ (ראה ציור).



א. מצא את השיעורים

של נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה

ושל נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה.

בתשובתך תוכל להשאיר שורש במידת הצורך.

ב. דרך נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה

העבירו משיק לפונקציה.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק, על ידי ציר ה־ y

ועל ידי הישר $x=\frac{2\pi}{3}$ (השטח המקווקו בציור).

שאלה 3

$f(x)=\sqrt{3}+2\sin(2x)$

(א)

$0\le x\le \pi$

$\Downarrow$

$\boxed{0\le x\le 180^\circ}$

$y'=2\cdot\cos(2x)\cdot 2=4\cos 2x$

$0=4\cos 2x$

$\cos 2x=0$

$2x=90+180k$

$\boxed{x=45+90k}$

k	$x=45+90k$	
k=0	$x=45^\circ$	$x=\frac{\pi}{4}$
k=1	$x=45^\circ+90^\circ=135^\circ$	$x=\frac{3\pi}{4}$
k=2	$x=45^\circ+90\cdot 2=$ X	מחוץ לתחום
k=-1	$x=45+90(-1)=$ X	מחוץ לתחום

$\rightarrow y=\sqrt{3}+2\cdot\sin(45\cdot 2)=3.73=2+\sqrt{3}$

$\rightarrow y=\sqrt{3}+2\cdot\sin(135\cdot 2)=-0.267$

x	0	10	45	100	135	150	180
y'	לא קיים	+	0	—	0	+	לא קיים
מינון	min	↗	max	↘	min	↗	max

$y_{(x=0)}=\sqrt{3}+2\sin(2\cdot 0)=\sqrt{3}$

$y(x=180)=\sqrt{3}+2\cdot\sin(2\cdot 180)=\sqrt{3}$

נקודות קיצון:

$(0,\sqrt{3})$ min

$(\frac{\pi}{4},3.73)$ max

$(\frac{3\pi}{4},-0.267)$ min

$(\pi,\sqrt{3})$ min

$(\frac{\pi}{4},3.73)$ max GOMIN

$(\frac{3\pi}{4},-0.267)$ min GOMIN

(ב)

$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 3.73-(\sqrt{3}+2\sin(2x))\,dx=\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 2+\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\sin(2x)\,dx=$

$=\left[2x-\frac{-2\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\left[2x+\cos(2x)\right]_0^{120^\circ}=$

$=\left[2\cdot\frac{2\cdot 3.14}{3}+\cos(2\cdot 120)\right]-\left[2\cdot 0+\cos(2\cdot 0)\right]=\boxed{2.686}$ סמ"ר

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2-3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר ה־ x .

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)$.

מצא את תחומי העלייה של הפונקציה $g(x)$.

(הפונקציות $g(x)$ ו־ $g'(x)$ מוגדרות באותו תחום.)

/המשך בעמוד 4/

שאלה 4

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2-3}$$

א. תחום הגדרה: (1) $x^2-3\neq 0$

$x^2\neq 3$

$\boxed{x\neq\pm\sqrt{3}}$

(2) א. אסימפטוטות אנכיות $\boxed{x=\pm\sqrt{3}}$

(3) א. $x=0\rightarrow \quad y=\frac{e^{-0}}{0-3}=-\frac{1}{3} \quad \boxed{(0,-\frac{1}{3})}$

$y=0\longrightarrow 0=\frac{e^{-x}}{x^2-3}\longrightarrow 0=e^{-x}\rightarrow$ אין פתרון

אין חיתוך עם ציר ה- x.

(4) א

$$y'=\frac{e^{-x}(-1)(x^2-3)-2x\cdot e^{-x}}{(x^2-3)^2}$$

$$0=\frac{-e^{-x}(x^2-3)-2xe^{-x}}{(x^2-3)^2}$$

$$0=-e^{-x}(x^2-3+2x)$$

לא מתאפס

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3 \qquad x=1$

x	-10	-3	-2	$-\sqrt{3}$	0	1	1.5	$\sqrt{3}$	10
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
כיוון	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

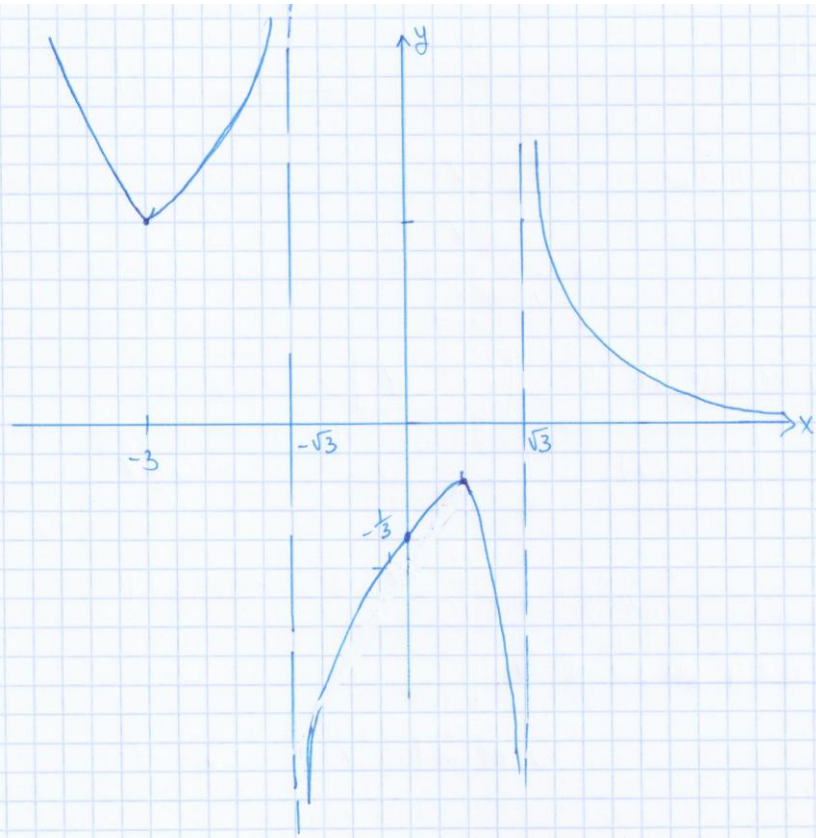
$$y_{(x=-3)}=\frac{e^{-(-3)}}{(-3)^2-3}=\frac{e^3}{6} \quad \boxed{(-3,\frac{e^3}{6})\ \min}$$

$$y_{(x=1)}=\frac{e^{-(+1)}}{(1)^2-3}=\frac{e^{-1}}{-2}=-\frac{1}{2e}= \quad \boxed{(1,-\frac{1}{2e})\ \max}$$

(5) א תחומי עלייה: $-3<x<-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}<x<1$

תחומי ירידה: $x>\sqrt{3}$, $1<x<\sqrt{3}$, $x<-3$

ד.



ג. אם הגרף הנ"ל הוא גרף הנגזרת של $f(x)$ אזי ←

לנגזרת אין עלולות חדות לפי גזרה - x ולכן ל $g(x)$ אין עלולות קיצון

$g(x)$:

x		$-\sqrt{3}$		$+\sqrt{3}$	
$g'(x)$	+		—		+
כיוון של $g(x)$	↗		↘		↗

תחום עלייה $g(x)$: $x<-\sqrt{3}$, $x>\sqrt{3}$

5. נתונות הפונקציות: $f(x) = \ell nx$, $g(x) = \ell n(2x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות.

(2) מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחת מן הפונקציות (אם יש כאלה).

(3) האם יש נקודת חיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות? נמק.

(4) האם לפונקציות הנתונות יש נקודות קיצון? נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

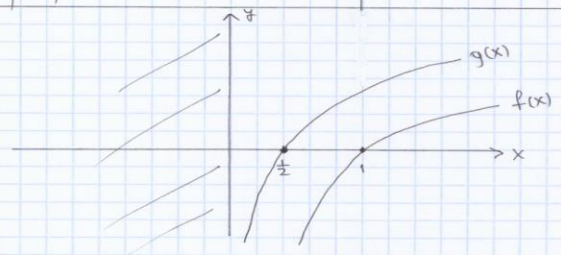
ב. (1) הראה כי $\ell n(2x) - \ell nx = \ell n2$ (בתחום ההגדרה של הפונקציות).

(2) דרך נקודות החיתוך עם ציר ה־ x של הגרפים של $f(x)$ ו־ $g(x)$, העבירו ישרים המאונכים לציר ה־ x .

היעזר בתת־סעיף ב(1), ומצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ ועל ידי האנכים.

תוכל להשאיר ℓn בתשובתך.

שאלה 5

	$f(x)=\ln x$	$g(x)=\ln(2x)$
א(1) תחום הגדרה	$\boxed{x>0}$	$2x>0$ $\boxed{x>0}$
א(2) חיתוך עם y	אין חיתוך ($x=0$ מחוץ לתחום)	אין חיתוך ($x=0$ מחוץ לתחום)
חיתוך עם x	$y=0 \rightarrow \ln x=0$ $e^0=x$ $x=1$ $(1,0)$	$y=0 \rightarrow \ln 2x=0$ $e^0=2x$ $2x=1$ $x=\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2},0)$
א(3) חיתוך בין הפונקציות	$\ln x=\ln 2x$ $\Downarrow$ $x=2x$ $0=x$ מחוץ לתחום - אין חיתוך	
א(4) קיצון	$y'=\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x}=0$ $0=1$ מספר שקר - אין קיצון	$y'=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$ $0=\frac{1}{x}$ $0=1$ מספר שקר - אין קיצון
א(5)		

(א) (1)

$$\ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$$

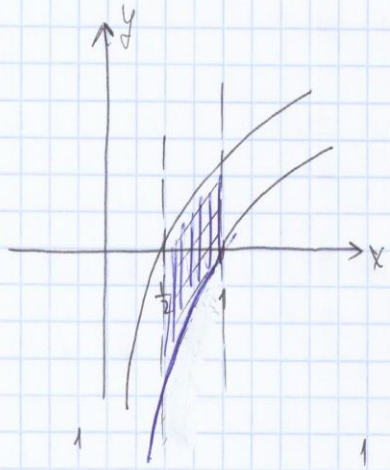
$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{2x}{x}\right) \overset{?}{=} \ln(2)$$

$$\ln(2) = \ln(2)$$

$$\checkmark$$

ב. (2)



$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x) - f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(2x) - \ln(x)\,dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(2)\,dx = \left[x \cdot \ln(2)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1 \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) = \boxed{0.346}$$

לפי סעיף קודם.
(ב-(1))