

הצעת פתרון- בחינת הבגרות במתמטיקה שאלון 805

הצעת הפתרון נכתבה על-ידי

אורן קימה, מיקי בנימיני, ערן שחר, יוחאי טוויג, דבורה עידו, אמנון הרפז, מיריי בכר ודור מנדל

מתמטיקה, קיץ תשע"ו, מס' 035805, 315 + נספח

- 2 -

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – סדרות, טריגונומטריה במרחב (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

סדרות

1. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ ($x > 1$)

א. הבע באמצעות x את מנת הסדרה של האיברים העומדים במקומות האיזוגיים בסדרה הנתונה.

ב. מצא את x .

ג. מצא את הסכום של ריבועי האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה הנתונה.

טריגונומטריה במרחב

2. נתונה פירמידה ישרה SABCD

שבסיסה מלבן ABCD

(ראה ציור).

נתון: $\angle ASC = 70^\circ$

$\angle CAB = 50^\circ$

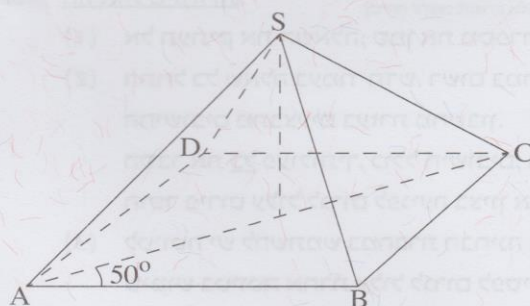
AB = 6 ס"מ

א. מהו גודל הזווית בין מקצוע צדדי ובין

בסיס הפירמידה?

ב. חשב את נפח הפירמידה.

ג. חשב את גודל הזווית ASB.



/המשך בעמוד 3/

שאלה 1

$$1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3} \dots$$

$$q = \frac{\frac{1}{x^2}}{1} = \boxed{\frac{1}{x^2}}$$

(P)

(P)

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{4}{3}$$

$$3 = 4 - \frac{4}{x^2}$$

$$\frac{4}{x^2} = 1$$

$$4 = x^2$$

$$x = 2, -2$$

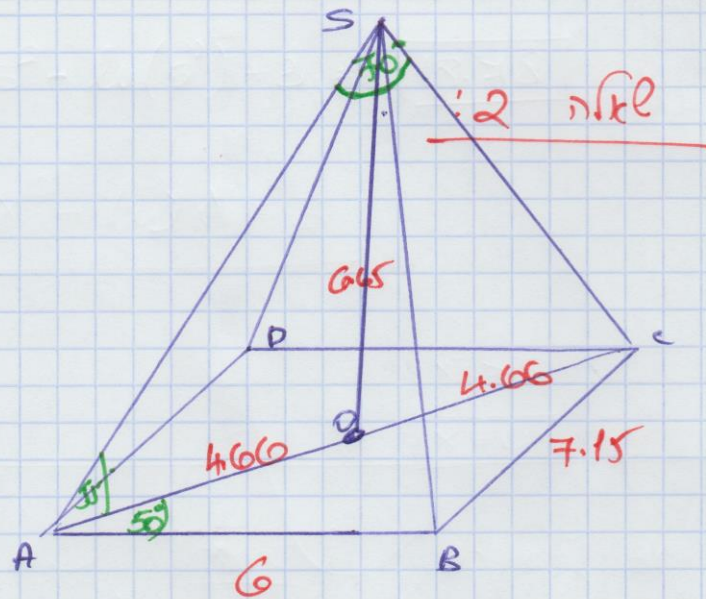
$$\boxed{x=2}$$

(E)

$$a_1 = a_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_4^2 = \frac{a_4^2}{a_2^2} = \frac{\left(\frac{1}{2^3}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{16}$$

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \boxed{\frac{4}{15}}$$



$$\angle SAC = \frac{180 - 70}{2} = \boxed{55^\circ}$$

(1c)

$\triangle ABC$

$$\tan 50 = \frac{CB}{6}$$

$$\underline{CB = 7.15}$$

$$\cos 50 = \frac{6}{AC}$$

$$\underline{AC = 9.33}$$

$$AO = OC = \frac{9.33}{2} = \underline{4.66}$$

(2)

$\triangle SOA$

$$\tan 55 = \frac{SO}{4.66}$$

$$\underline{SO = 6.65}$$

$$V_{\text{פירמידה}} = \frac{6 \cdot 7.15 \cdot 6.65}{3} = \boxed{95.2 \text{ סמ}^3}$$

ΔSOA :

$$\cos SS = \frac{4.66}{SA}$$

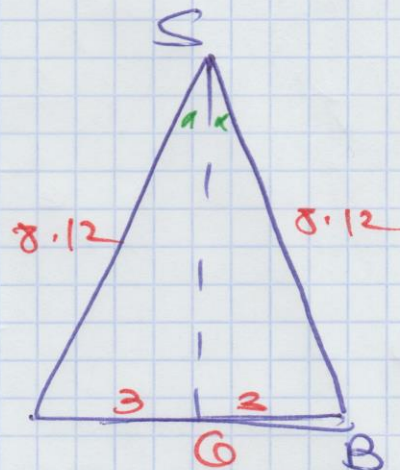
(2)

$$SA = 8.12$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8.12}$$

$$\alpha = 21.66$$

$$\angle ASB = 2\alpha = \boxed{43.32^\circ} \text{ A}$$



פרק שני – גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה $\left(66\frac{2}{3}\right)$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = x + \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f'(x)$ בתחום הנתון.
ענה על הסעיפים א ו-ב עבור התחום הנתון.

- א. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .
(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $g(x)$,
וקבע את סוגן.
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ב. עבור אילו ערכים של x , שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא שלילי? נמק.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} + e^{4-2x} + 2$.
א. (1) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ב. דרך נקודת הקיצון של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x .
השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי האנך, על ידי ציר ה- y
ועל ידי הישר $y = k$, שווה ל- $\frac{e^4}{2} - 8\frac{1}{2}$.
 $0 < k < 16$
מצא את הערך של k .

שאלה 3:
 $0 \leq x \leq \pi$

$$f(x) = x + \sin(2x)$$

$$g(x) = f'(x) = 1 + 2\cos(2x)$$

נמצא את נקודות הקיצון של $f(x)$ (1c)

$$1 + 2\cos(2x) = 0$$

$$\cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$\downarrow$$

$$60^\circ$$

$$2x = -120^\circ + 360^\circ k$$

$$x = -60^\circ + 180^\circ k$$

$$\downarrow$$

$$120^\circ$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{3}, 0 \right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0 \right) \right]$$

$$g'(x) = -4\sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) = 0$$

$$2x = 180^\circ k$$

$$x = 90^\circ k$$

$$\downarrow$$

נקודות קיצון: $0, 90, 180$

שאלה 4:

$$f(0) = 3$$

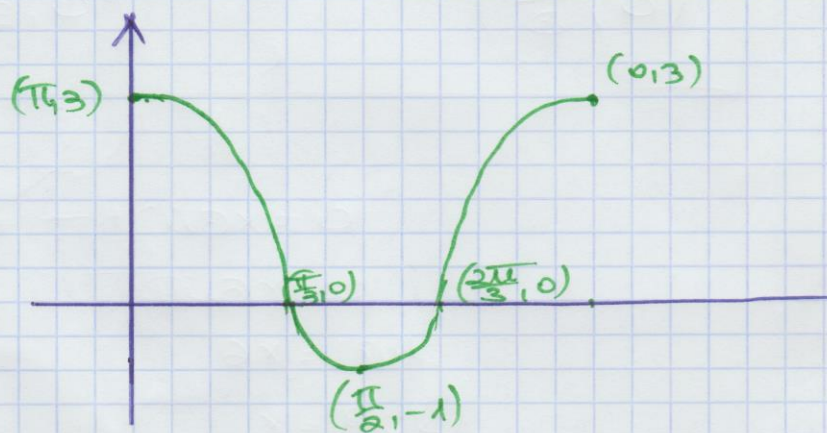
$$f(90) = -1$$

$$f(180) = 3$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	נקודה	\downarrow	נקודה	\uparrow	נקודה

צד הימין ממשל

מקסימום	(0, 3)
מינימום	($\frac{\pi}{2}, -1$)
מקסימום	($\pi, 3$)



3/c

המשך הפתרון של $f(x)$ הוא פולינום
כאשר $f'(x)$ הוא פולינום

ד



$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

שאלה 4:

$$f(x) = e^{2x} + e^{4-2x} + 2$$

תנאי
x

3/ב

$$f(0) = e^0 + e^4 + 2 = e^4 + 3$$

(11c)

$$(0, e^4 + 3)$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{4-2x} = 0$$

(2/c)

$$2e^{2x} = 2e^{4-2x}$$

$$e^{2x} = e^{4-2x}$$

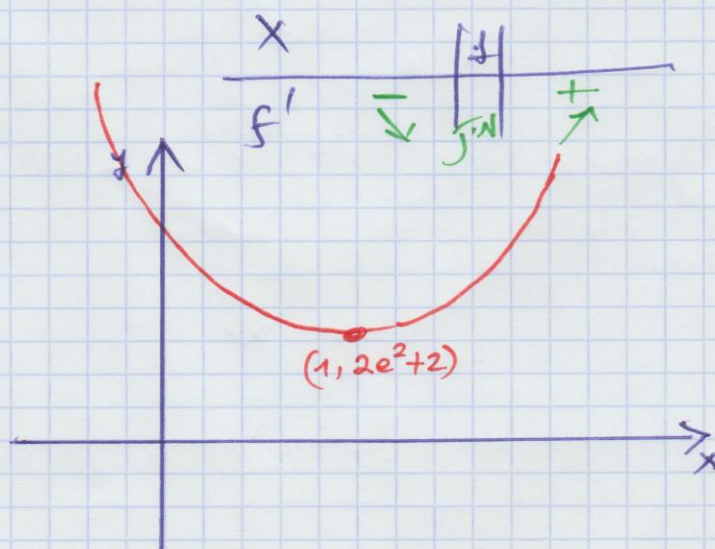
$$2x = 4 - 2x$$

$$4x = 4$$

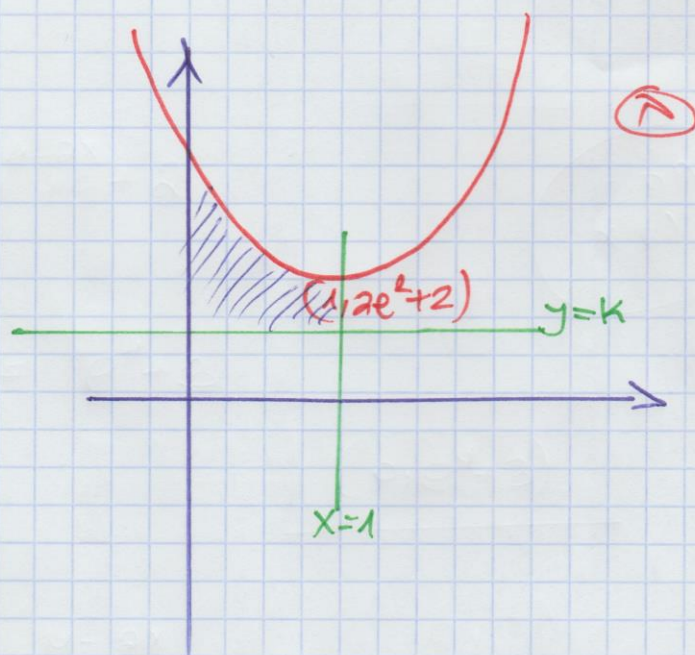
$$\underline{x = 1}$$

$$f(1) = e^2 + e^2 + 2 = 2e^2 + 2$$

$$f(1, 2e^2 + 2)$$



(3/c)



$$S_{\text{מלבן}} = 1 \cdot k = \boxed{k}$$

$$S_{\text{הפרש}} = \int_0^1 (e^{2x} + e^{4-2x} + 2) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{4-2x}}{2} + 2x \right]$$

$$\left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + 2 \right] - \left[\frac{e^0}{2} - \frac{e^4}{2} + 2 \cdot 0 \right] =$$

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} = \boxed{1\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2}}$$

$$S_{\text{הפרש}} = 1\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} - k$$

$$= \frac{e^4}{2} - 8\frac{1}{2} \quad (\text{שוויון})$$

$$1\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} - k = \frac{e^4}{2} - 8\frac{1}{2}$$

$$\boxed{k=10}$$

מתמטיקה, קיץ תשע"ו, מס' 035805, 315 + נספח

- 4 -

5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \ln(x^2) - 3$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?

ג. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ד. (1) מצא את הערך של $f(5)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 2$.

מצא כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x . נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

שאלה 5:

$$\underline{f(x) = x^2 - \ln(x^2) - 3}$$

$$\begin{matrix} x^2 > 0 \\ \boxed{x \neq 0} \end{matrix}$$

3 א (10)

$$\boxed{x=0}$$

אין נקודה

2 (5)

3 (5)

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{x^2}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0$$

$$2x = \frac{2}{x}$$

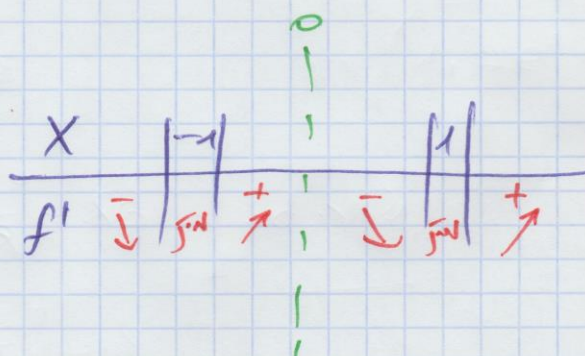
$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$f(1) = -2$$

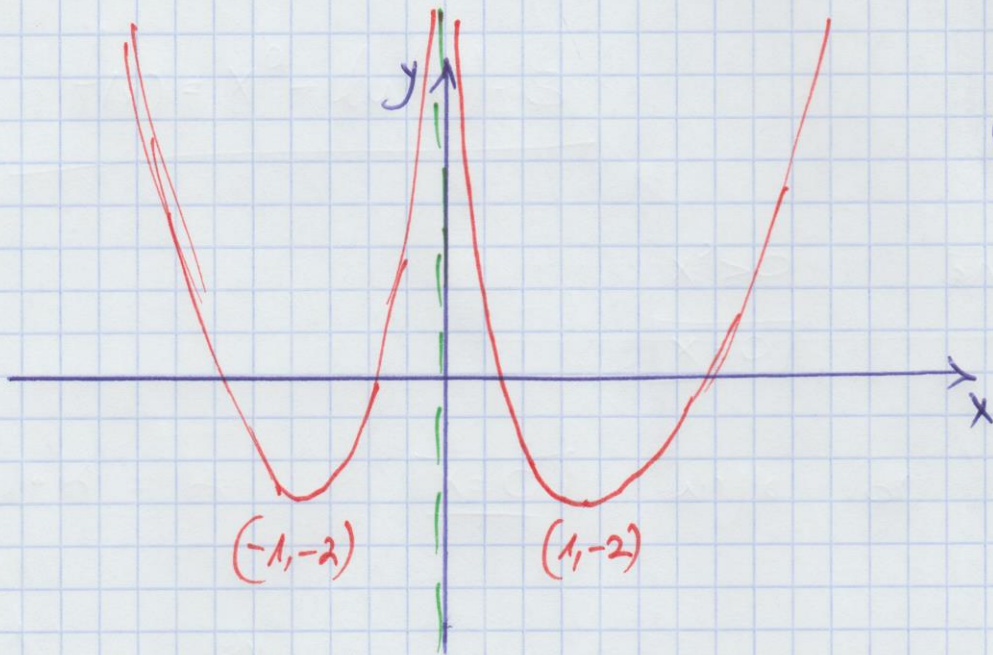
$$f(-1) = -2$$



$$\begin{matrix} \text{מיני} & (-1, -2) \\ \text{מיני} & (1, -2) \end{matrix}$$

$$f(5) = 5^2 - \ln(5^2) - 3 = \boxed{18.78}$$

(13)



(23)

(ה) הפונקציה $f(x)$ איננה נגזרת של x^2 כי

אם נחשב את הנגזרת של x^2 נקבל

אם $f(x)$ היא נגזרת של x^2 חייב להתקיים