

הצעת פתרון- בחינת הבגרות במתמטיקה מועד ב'

קיצ 15 שאלון 805

הצעת הפתרון נכתבה על-ידי מורים למתמטיקה
בבתי הספר של קידום.

סדרות

1. ארבעת האיברים שלפניך: a_1, a_2, a_3, a_4 , הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית עולה.

סכום ארבעת האיברים הוא 20.

שלושת האיברים a_1, a_2, a_4 הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית.

(a_1 הוא האיבר הראשון בשתי הסדרות.)

א. הראה כי a_1 שווה להפרש הסדרה החשבונית, ומצא את הפרש הסדרה החשבונית.

ב. $\frac{a_2}{a_3 - a_1}$ הוא האיבר הראשון בסדרה הנדסית אין-סופית יורדת.

סכום כל האיברים בסדרה זו שווה ל-2.

מצא את הסכום של 6 האיברים הראשונים בסדרה זו.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$$

$$a_1 + q_1 + d + q_1 + 2d + q_1 + 3d = 20$$

$$4a_1 + 6d = 20 \quad (1)$$

$$a_1, q_1 + d, q_1 + 3d$$

נ.כ.מ.0

$$\frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 3d}{q_1 + d} \rightarrow \cancel{a_1^2} + 2a_1d + d^2 = \cancel{a_1^2} + 3a_1d$$

$$d^2 = a_1d \quad \vee d \neq 0$$

$$\boxed{d = a_1}$$

$$4d + 6d = 20$$

$$10d = 20 \Rightarrow \boxed{d = 2} \rightarrow q_1 = d = 2$$

נ.כ.מ.0

$$A_1 = \frac{a_2}{a_3 - q_1} = \frac{a_1 + d}{2d} = \frac{2 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

נ.כ.מ.0

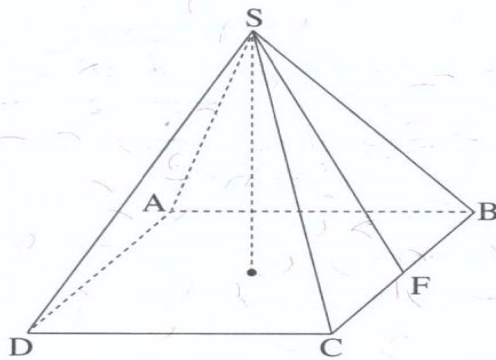
$$S = \frac{A_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} = 2 \rightarrow 1 = 2 - 2q$$

$$2q = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \frac{1}{2}}$$

$$S_6 = \frac{A_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{32} = 1.96875$$

טריגונומטריה במרחב



2. נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע.

גובה הפירמידה שווה לצלע של בסיס הפירמידה.

SF הוא גובה למקצוע CB בפאה SCB (ראה ציור).

א. מצא את הזווית בין SF לבסיס הפירמידה.

ב. מצא את הזווית CSB.

ג. נפח הפירמידה הוא 1125 סמ"ק.

מצא את שטח המשולש SDB.

$SM = \frac{853}{\sqrt{2}} = x$
 $ABCD$

$SM = x$
 $MF = 0.5 \cdot DC = 0.5x$
 $(\triangle OBC \Rightarrow \text{מחזיקה } MF)$

$\tan \alpha = \frac{x}{0.5x} = 2$
 $\alpha = 63.435^\circ$

$SM = x$
 $MF = 0.5x$
 $CF = 0.5x$
 $SC = \sqrt{x^2 + (0.5x)^2} = 1.118x$

$\tan \beta = \frac{0.5x}{1.118x} \Rightarrow \beta = 24.0948^\circ$
 $\beta = 24.0948^\circ$

$\angle SCB = \beta = 24.0948^\circ$
 $\angle CSB = 2\beta = 48.19^\circ$

$SM = x$
 $MF = 0.5x$
 $CF = 0.5x$
 $SC = 1.118x$

$$\text{נמצא } V = \frac{x \cdot x \cdot x}{3} = \frac{x^3}{3} = 1125 \Rightarrow \boxed{x=15} \quad \textcircled{2}$$

ללא

$\Delta SDB:$
(פיגור)

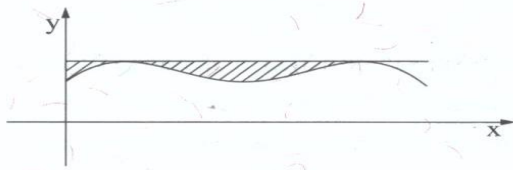
$$DB^2 = BC^2 + DC^2 = 15^2 + 15^2$$

$$DB = 21.2$$

ללא

$$\text{נמצא } \$_{\Delta SDB} = \frac{DB \cdot \$m}{2} = \frac{21.2 \cdot 15}{2} = 159.1$$

ללא



3. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos(2x)$

בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודות המקסימום המוחלט שלה

(ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

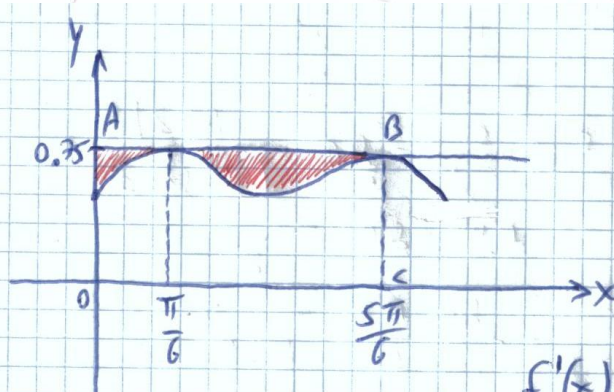
(2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y

(השטח המקווקו בציור).

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - \frac{3}{4}$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

מהי משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודות המקסימום המוחלט שלה? נמק.

תוכל להיעזר בתת-סעיף א (1).



$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin(2x)$$

$$\cos x - \sin 2x = 0$$

$$\cos x - 2 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\textcircled{I} \cos x = 0$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$k=0: x = \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{II} \sin x = 0.5$$

$$x = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow k=0: x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow k=0: x = \frac{5\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.5$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.75$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0.75$$

$$f(0) = 0.5$$

$$f(\pi) = 0.5$$

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.75 \\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0.75 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{6}, 0.75\right) \text{ max} \\ \left(\frac{5\pi}{6}, 0.75\right) \text{ max} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0.75$$

נ"ח \$ = 0.25 \cdot \frac{5\pi}{6} = 1.9635\$
ע"ח

(2) כ"3

ABCO

$$\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sin x + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= (0.6495) - (-1) = 1.6495$$

ע"ח

נ"ח \$ = 1.9635 - 1.6495\$
ע"ח

$$\$ = 0.31398$$

ע"ח

$$(0 \leq x \leq \pi) \quad g(x) = f(x) - \frac{3}{4} \quad (1)$$

אשר הוא מסתובב סביב המעטפת

$$y=0$$

(שימונה) x-ה של ית הקירוב זה
(f(x)-δ) שימונה y-ה מעל -δ (3/4)

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{e^x}$, a הוא פרמטר ($a < 2$).

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון.

הפרש בין שיעור ה- x החיובי לבין שיעור ה- x השלילי של נקודות הקיצון הוא 2.

מצא את הערך של a .

הצב $a = 1$, וענה על סעיף ג.

ג. (1) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

שאלה מס' (4):

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{e^x} \quad (a < 2)$$

א. נגזרת: $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - e^x(x^2+2x+a)}{(e^x)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^x(2x+2-x^2-2x-a) = 0$$

\downarrow
 $\neq 0$

$$2-a = x^2$$

$$\pm\sqrt{2-a} = x$$

$$\sqrt{2-a} - (-\sqrt{2-a}) = 2$$

$$2\sqrt{2-a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2-a} = 1 \Rightarrow 2-a = 1$$

\Downarrow

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} \quad \boxed{1=a}$$

$x=0$: $f(0) = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow (0,1) \quad \oplus^2$

$y=0$: $\frac{x^2+2x+1}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1$

\Downarrow

$\boxed{(-1,0)}$

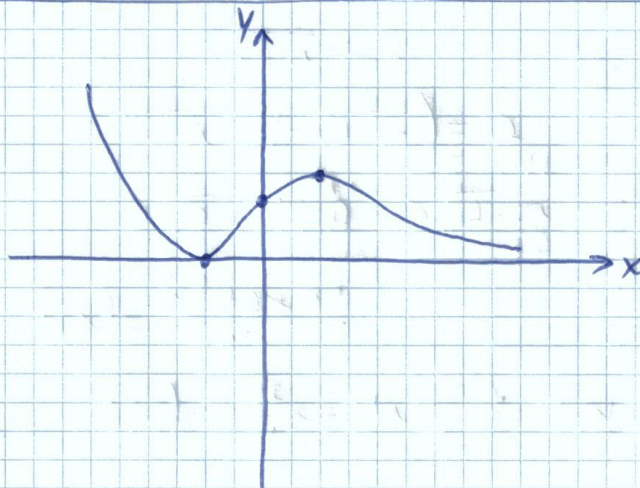
$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot e^x - e^x \cdot (x^2+2x+1)}{e^{2x}} = 0 \quad ; (2) \text{ נ' } 4$$

$$e^x(2x+2 - x^2 - 2x - 1) = 0$$

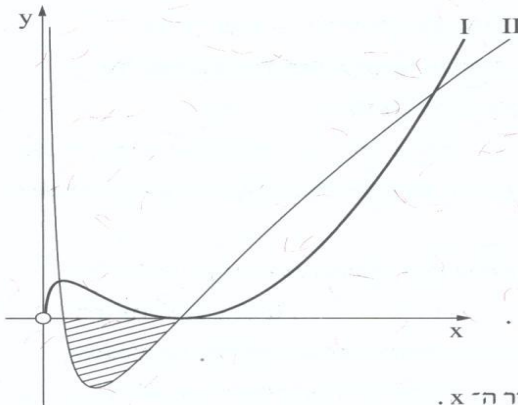
$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (1, \frac{4}{e}) \text{ max} \quad 1.47$$

$$x = -1 \quad (-1, 0) \text{ min}$$

x	-1	1
y'	-	+
y	↓	↑



(3) נ' 4



5. בציור שלפניך מוצגים הגרפים

של הפונקציה $f(x)$

ושל פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$,

הגרפים I ו-II.

א. איזה גרף הוא של הפונקציה $f(x)$,

ואיזה גרף הוא של פונקציית

הנגזרת $f'(x)$? נמק.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא $f(x) = 2x(\ln x)^2$.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף II עם ציר ה- x .

ד. באיזה תחום שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ הוא חיובי? נמק.

ה. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

$$f'(x) : \text{II} \quad f(x) : \text{I} \quad (1)$$

$$f(x) = 2x \cdot (\ln x)^2 \quad (2)$$

$$x > 0 \quad \text{ג. 1. נקודות חיתוך}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2(\ln x)^2 + 2x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$2(\ln x)^2 + 4 \ln x = 0$$

$$2 \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = 0.135$$

$$\boxed{(1, 0) \quad (e^{-2}, 0)}$$

$$\boxed{0 < x < e^{-2}} \\ \boxed{1 < x}$$

$$(3) \text{ סימני } f'(x) \text{ חיוביים}$$

$$(4)$$

$$\int_{e^{-2}}^1 f'(x) dx = [f(x)]_{e^{-2}}^1 = [f(1)] - [f(e^{-2})] = 0 - 2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$$

$$S = \left| -\frac{2}{e^2} \right| = \frac{2}{e^2} = 1.0822$$