הצעת פתרון- בחינת הבגרות במתמטיקה

קיץ 2015- שאלון 35804

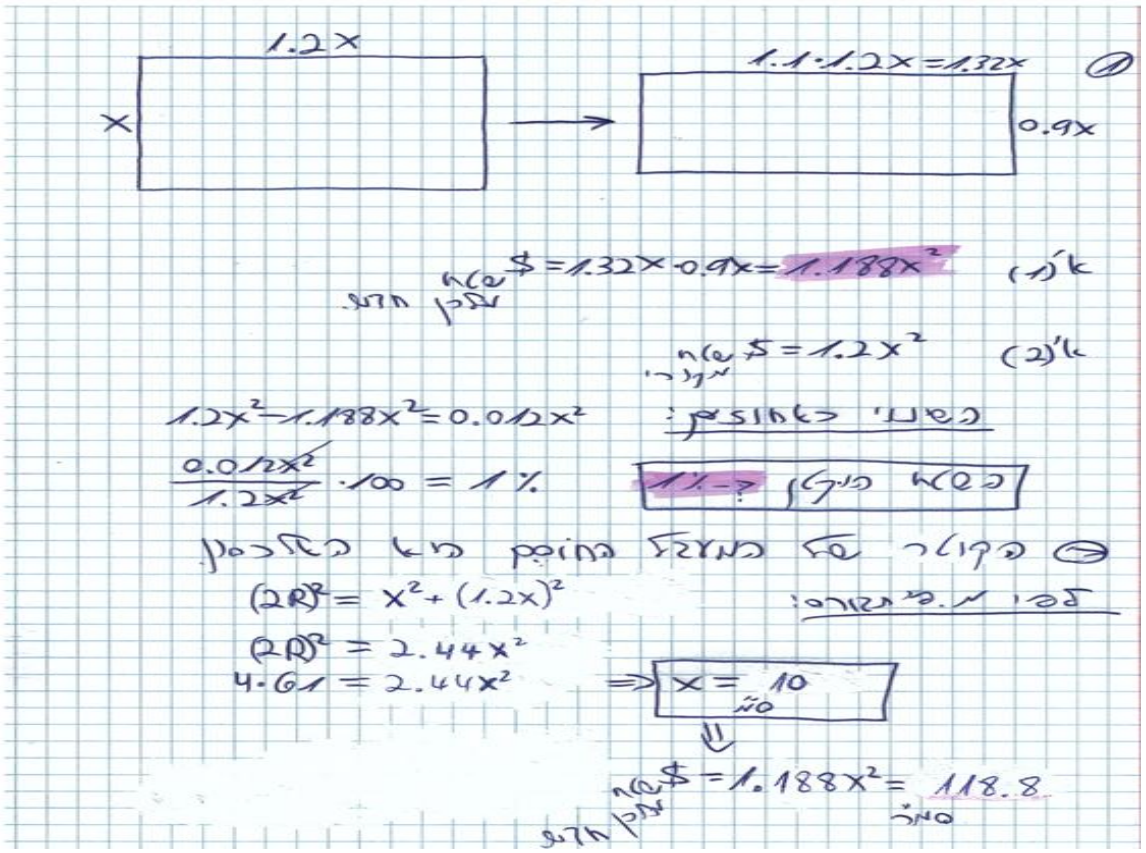
הצעת הפתרון נכתבה על-ידי איתי הרטמן, אמנון הרפז, אוהד ריטרבנד,
אסא קסלר, נופר קריסטל, צביקה מילכיאלי, רימה דרייזין, אמנון בר-כוכבא

1. נתון מלבן שרוחבו x ס"מ, ואורכו גדול פי 1.2 מרוחבו.
הגדילו את אורך המלבן ב- 10% , והקטינו את רוחב המלבן ב- 10% . התקבל מלבן חדש.

א. (1) הבע באמצעות x את שטח המלבן החדש.

(2) בכמה אחוזים השתנה השטח של המלבן הנתון?

ב. R הוא הרדיוס של המעגל החוסם את המלבן הנתון.
נתון כי $\sqrt{61}$ ס"מ = R.
מצא את שטח המלבן החדש.



2. נתון כי מעגל, שמשוואתו $(x-3)^2+(y+k)^2=25$, עובר דרך ראשית הצירים.
k הוא פרמטר.

א. (1) מצא את שני הערכים של k .

(2) רשום את המשוואות של שני המעגלים המתאימים לערכים של k שמצאת.

ב. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של כל אחד משני המעגלים.

ג. סרטט את שני המעגלים במערכת צירים אחת.

ד. הישר $x=a$ משיק לשני המעגלים, $a>0$.

(1) מצא את a.

(2) מה הם השיעורים של נקודות ההשקה?

② $(x-3)^2+(y+k)^2=25$

א'(1) נקיים $(0,0)$: $(0-3)^2+(0+k)^2=25$

$9+k^2=25$

$k^2=16 \Rightarrow \boxed{k=\pm 4}$

א'(2) עבור $k=4$: I $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

עבור $k=-4$: II $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

ב מעגל I : חיתוך עם ציר x: $y=0$

$x^2-6x+9+16=25$

$x^2-6x=0 \Rightarrow \boxed{(0,0),(6,0)}$

חיתוך עם ציר y: $x=0$

$9+y^2+8y+16=25$

$y^2+8y=0 \Rightarrow \boxed{(0,0),(0,-8)}$

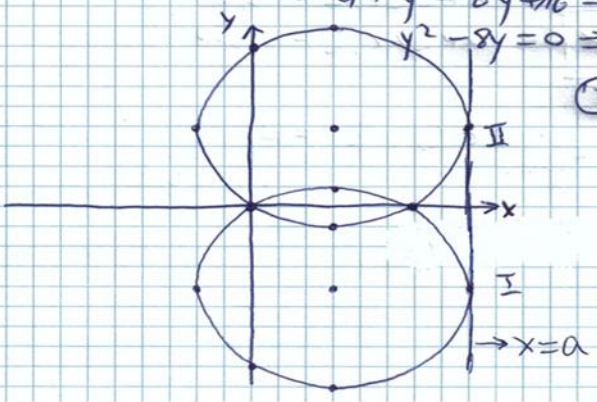
מעגל II : $y=0$: $x^2-6x+9+16=25$

$x^2-6x=0 \Rightarrow \boxed{(0,0),(6,0)}$

$x=0$: $9+y^2-8y+16=25$

$y^2-8y=0 \Rightarrow \boxed{(0,0),(0,8)}$

③



③ (1) $a=8$

(2) $(8,4)$

$(8,-4)$

3. בקופסה I יש 3 כדורים אדומים ו־ 6 כדורים ירוקים.

בקופסה II יש 12 כדורים אדומים ו־ 4 כדורים ירוקים.

בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה 2 כדורים זה אחר זה (בלי החזרה).

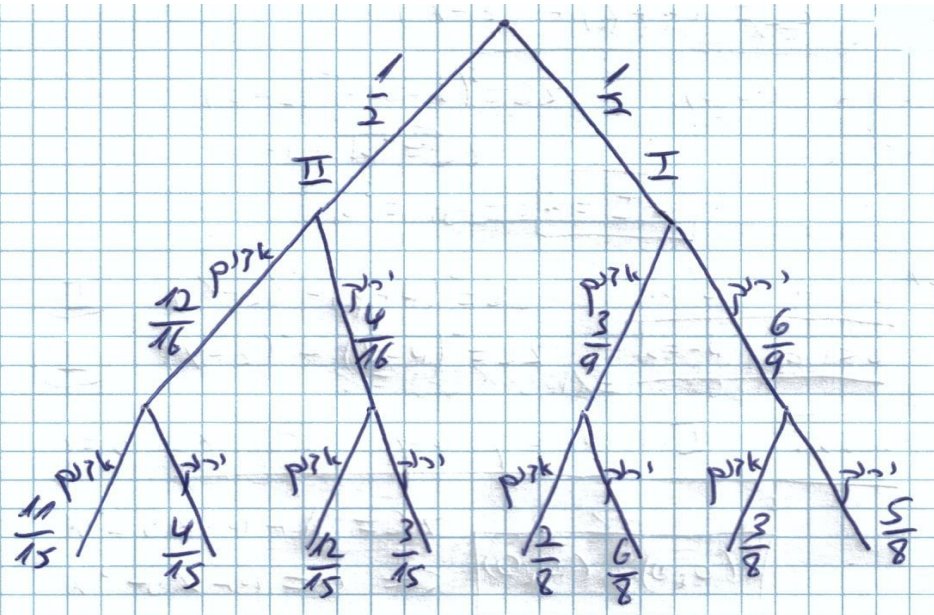
א. מהי ההסתברות ש־ 2 הכדורים יהיו באותו צבע?

ב. מהי ההסתברות ש־ 2 הכדורים יהיו בצבעים שונים?

ג. ידוע כי 2 הכדורים היו באותו צבע.

מהי ההסתברות שהם הוצאו מקופסה I ?

(3)



(א)

$$P(\text{אדום}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{11}{20} = 0.55$$

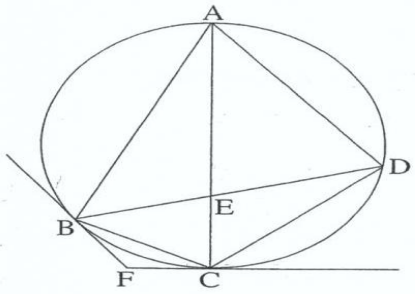
(ב)

$$1-\frac{11}{20} = \frac{9}{20} = 0.45$$

(ג)

$$P(\text{ירוק} / \text{אדום}) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}}{0.55} =$$

$$= \frac{0.25}{0.55} = \frac{5}{11}$$



4. מרובע ABCD חסום במעגל.
אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה E .
העבירו משיק למעגל בנקודה B
ומשיק למעגל בנקודה C .
המשיקים נפגשים בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC = 90^\circ$

א. (1) הוכח: $\sphericalangle ADB + \sphericalangle FBC = 90^\circ$.
(2) הוכח: $\sphericalangle BFC = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.

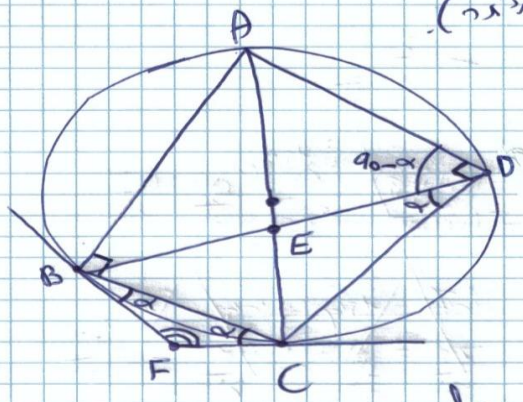
ב. (1) הוכח: $\triangle BEC \sim \triangle AED$.
(2) נתון גם: $BE \cdot DE = 21$, $AE = 7$.
מצא את קוטר המעגל.

<u>הערה</u>: הפתרון של סעיף ב אינו תלוי בפתרון של סעיף א.

(4) $\sphericalangle FBC = \sphericalangle BDC$ (זוית בין משיק לחיתוך)

א(1) $\sphericalangle ABC = 90$
$\Downarrow$
AC קוטר
(זוית היקפית רחב 90 נשענת על קוטר)
$\sphericalangle ADC = 90$

$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 90^\circ$
$\sphericalangle ADB + \sphericalangle FBC = 90^\circ$



מ.ש.ל

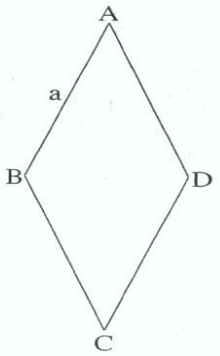
א(2) $\sphericalangle FBC = \sphericalangle FCB = \alpha$ (2 משיקים מחוץ לעגול)
$\sphericalangle BDC = \sphericalangle FBC = \alpha$

$\Leftarrow \begin{cases} \sphericalangle ADB = 90 - \alpha \\ \sphericalangle F = 180 - 2\alpha \end{cases}$ מ.ש.ל

ב(1) $\sphericalangle BEC = \sphericalangle AED$ (ז. קודקודים)
$\sphericalangle BCE = \sphericalangle ADB$ (ז. היקפיות על אותו מיתר AB)
$\Downarrow$
$\triangle BEC \sim \triangle AED$ (ז.ז)

ב(2) $\boxed{\frac{BE}{AE} = \frac{EC}{ED}} = \frac{BC}{AD}$

$BE \cdot ED = AE \cdot EC$
$21 = 7 \cdot EC$
$\Downarrow$
$\boxed{EC = 3}$
$\Downarrow$
$AC = AE + EC = 7 + 3 = 10$



5. במעוין ABCD שצלעו a (ראה ציור)

נתון: $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BAD < 90^o$.

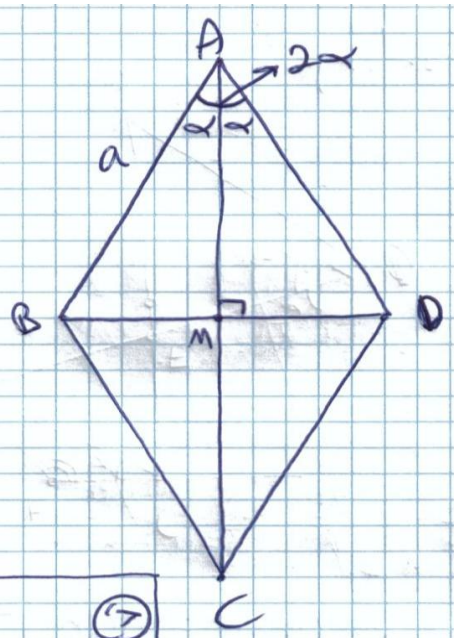
א. (1) הבע את AC ואת BD באמצעות a ו־ α .

(2) נתון גם: $AC \cdot BD = a^2$.

מצא את α .

ב. נתון גם כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 10 ס"מ.

מצא את שטח המעוין ABCD (ערך מספרי).



(5) ΔBMA:

א'(1) $\frac{BM}{a} = \sin\alpha$

$BM = a\sin\alpha$

$\Downarrow$

$\boxed{BD = 2a\sin\alpha}$

$\frac{AM}{a} = \cos\alpha$

$AM = a\cdot\cos\alpha$

$\Downarrow$

$\boxed{AC = 2a\cos\alpha}$

א'(2) $AC\cdot BD = a^2$

$\cancel{2a}\cos\alpha\cdot\cancel{2a}\sin\alpha = \cancel{a^2}$

$4\cos\alpha\sin\alpha = 1$

$2\cdot\underbrace{2\cos\alpha\sin\alpha}_{\sin(2\alpha)} = 1$

$\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$2\alpha = 30^\circ + 360^\circ k$

$\alpha = 15^\circ + 180^\circ k \leftarrow \boxed{\alpha = 15^\circ}$

$2\alpha = 150^\circ + 360^\circ k$

נפסל לפי הנתון.
$(2\alpha < 90)$

(7) $\frac{BD}{\sin 2\alpha} = 2R$

$\frac{2a\sin(15)}{\sin(30)} = 2R = 20$

$1.035a = 20$

$\boxed{a = 19.32}$

שטח המעוין:

$\frac{AC\cdot BD}{2} =$

$\frac{37.32\cdot 10}{2} = 186.6$

סמ"ר

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$.

($g'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו תחום.)

העבירו משיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ המקבילים לציר ה־ x .

מה הם שיעורי ה־ x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה? נמק.

(6) $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2}$

(א) $x \neq 0$

(ב) $x=0$, $y=-1$

(ג) אין חיתוך עם ציר y $(x \neq 0)$

יש חיתוך עם ציר x: $y=0$

$0 = -x^2+2x+3$

$x=-1 \rightarrow \boxed{(-1,0)}$

$x=3 \rightarrow \boxed{(3,0)}$

(ד) $f'(x) = \frac{(-2x+2)\cdot x^2 - 2x(-x^2+2x+3)}{x^4} = 0$

$\cancel{-2x^3}+2x^2+\cancel{2x^3}-4x^2-6x=0$

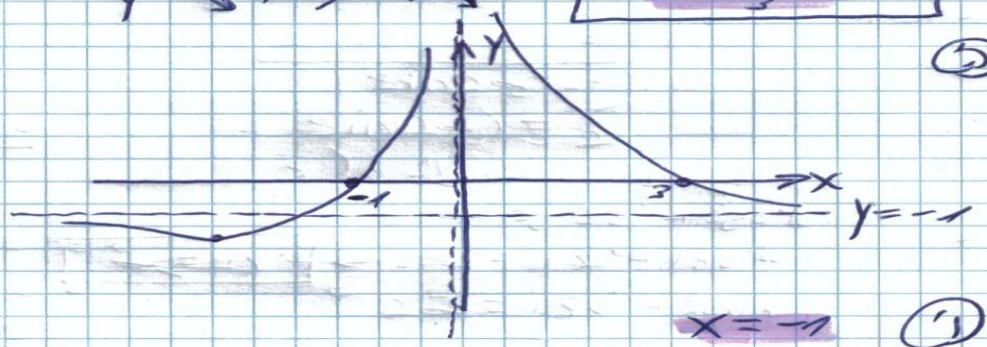
$-2x^2-6x=0 \rightarrow x=0$ (פס)

$x=-3$

x		-3		0	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\boxed{(-3, -\frac{4}{3})\ min}$

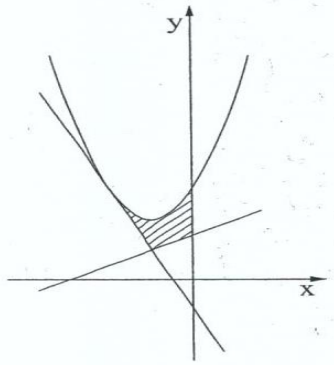
(ה)



(ו) $x=-1$

$x=3$

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + ax + b$. a ו־ b הם פרמטרים.
הישר $y = -2x - 1$ משיק לגרף הפונקציה
בנקודה שבה $x = -2$ (ראה ציור).



א. מצא את הערך של a ואת הערך של b .

הצב: $a = 2$ ו־ $b = 3$, וענה על סעיף ב.

ב. מצא את השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי המשיק, על ידי הישר $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
ועל ידי ציר ה־ y (השטח המקווקו בציור).

7) $f(x) = x^2 + ax + b$

$y = -2x - 1$ משיק

נק' הנגיעה: $(-2, 3)$

(בגלל ש $x = -2$ משותף גם למשיק)

- נקבל את נק' הנגיעה הפתרון לכך:

$3 = (-2)^2 - 2a + b$

$\boxed{2a - 1 = b}$

שיפוע המשיק: $m = -2$

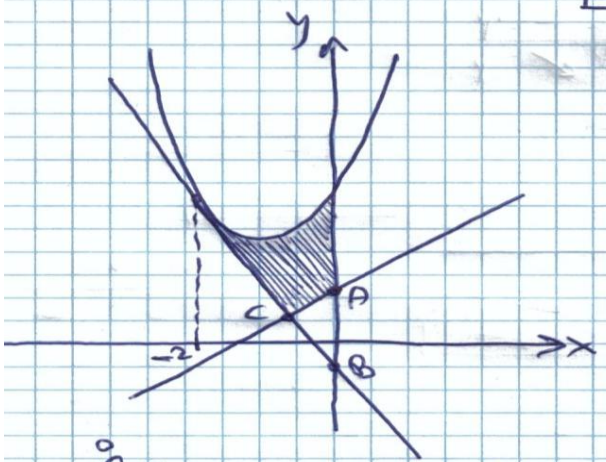
$\Downarrow$

$f'(x = -2) = -2$

$f'(x) = 2x + a$

$f'(-2) = -4 + a = -2$

$\boxed{b = 3} \Leftarrow \boxed{a = 2}$



ב)

נק' A: $(0, 1.5)$

נק' B: $(0, -1)$

נק' C: $-2x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

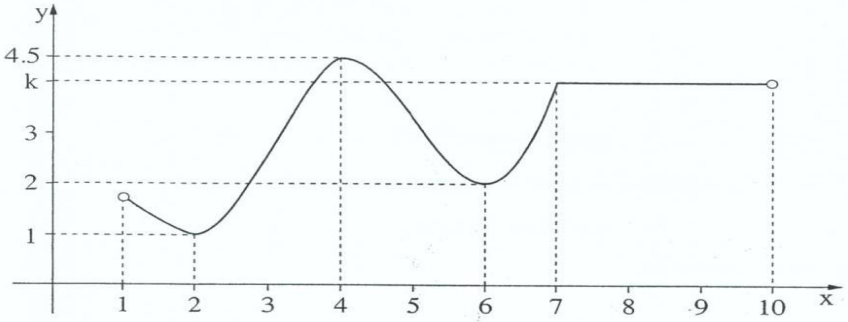
$-2.5 = 2.5x$

$-1 = x \rightarrow C(-1, 1)$

$S_{\Delta ABC} = \frac{2.5 \cdot 1}{2} = 1.25$

$\int_{-2}^{0} [x^2 + 2x + 3 - (-2x - 1)]dx = \frac{8}{3} \Rightarrow$ שטח נגיעה $S = \frac{8}{3} - 1.25 = 1.4166$ יח"ר

8. בציור שלפניך מוצג גרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום $1 < x < 10$.



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים, וענה על הסעיפים א, ב, ג, ד.

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ־ 7 מתקיים:

(1) $f'(x) < 0$. נמק.

(2) $f'(x) > 0$. נמק.

(3) $f'(x) = 0$. נמק.

ב. נתון: $\int_7^9 k\,dx = 8$, k הוא הפרמטר המסומן על ציר ה־ y בציור.

מצא את הערך של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 9$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $2 \le x \le 6$.

ד. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־ x , בתחום $2 \le x \le 4$ (ערך מספרי).

8 (א)

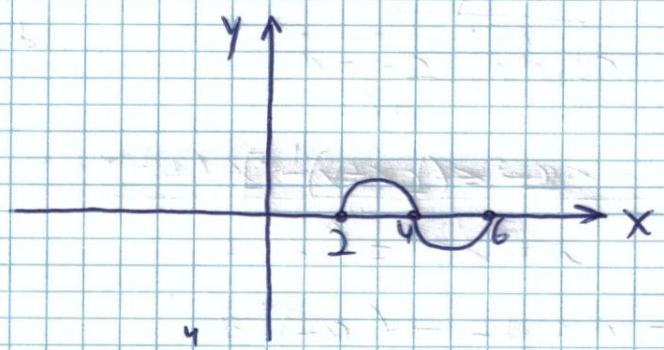
(1) $4 < x < 6$, $1 < x < 2$

(2) $6 < x < 7$, $2 < x < 4$

(3) $x = 6$, $x = 4$, $x = 2$

$\int_7^9 k\,dx = 8$ $\quad [kx]_7^9 = 9k - 7k = 8 \Rightarrow \boxed{k=4} \Rightarrow f(x) = 4$ (ב)

(ג)



(ד)

$\int_2^4 f'(x)\,dx = [f(x)]_2^4 = f(4) - f(2) = 4.5 - 1 = 3.5$

יח"ש